Дәріс 13

Лаплас теңдеуі үшін негізгі шекаралық есептері. Есептердің қойылуы. Лаплас теңдеуі үшін Дирихле есебі

Физикалық табиғаты әртүрлі стационарлық процесстерді зерттеген жағдайда, әдетте эллипстік типті теңдеулер шығады..

Бұл типті теңдеулердің ішіндегі ең көп тараған, ол Лаплас теңдеуі:

$$\Delta u(x, y, z) = 0 \tag{72}$$

Анықтама. Егер G аймағында өзінің екінші ретті туындыларымен бірге үзіліссіз болып табылатын $u(x, y, z)$ функциясы Лаплас теңдеуін (72) қанағаттандыратын болса, онда ол функция G аймағында гармониялық деп аталады.

Бұл теңдеуді (72) электромагниттік өрістің потенциалы, денеге температураның стационарлық үлестірілуі және т.с.с. қанағаттандырады.

Жылу көздері (жылу сіңіргіштер) болған жағдайда теңдеу мынадай түрде жазылады:

$$\Delta u(x, y, z) = -f(x, y, z). \tag{73}$$

Мұндағы $f = \dfrac{F}{\kappa}$, F – жылу көздерінің тығыздығы, κ – жылу өткізгіштік коэффициенті.

Біртекті емес Лаплас теңдеуін (73) жиірек Пуассон теңдеуі деп те айтады.

S бетімен шектелген G денесін қарастырайық. Бұл дененің ішінде $u(x, y, z)$ температурасының стационарлық үлестірілуі туралы есеп былайша қойылады:

G аймағының ішінде (73) – теңдеуді және төмендегі шекаралық шарттардың біреуін қанағаттандыратын $u(x, y, z)$ функциясын табу қажет:

1. $u\big|_S = f_1$ (I шеттік есеп);

2. $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f_2$ (II шеттік есеп);

3. $\left.\left(\dfrac{\partial u}{\partial n} + h(u - f_3)\right)\right|_S = 0$ (III шеттік есеп),

мұндағы f_1, f_2, f_3, h – берілген функциялар, $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ – S бетіне жүргізілген сыртқы нормаль бойынша алынған туынды.

Лаплас теңдеуі үшін қойылған бірінші шеттік есепті жиірек Дирихле есебі деп, ал екінші шеттік есепті Нейман есебі деп атайды.

Егер есептің шешімі S бетіне қарағанда ішкі (сыртқы) G_0 аймағында іздестірілетін болса, онда сәйкес есепті ішкі (сыртқы) шеттік есеп деп атайды.

Енді Лаплас теңдеуі үшін қойылған бұл есептерді Фурье әдісімен қалай шешуге болатындығын қарастырайық.

а) Айталық, G аймағы радиусы R-ге тең дөңгелек болсын. Бұл жағдайда есепті полярлық координиталарда шешкен орынды болып табылады:

$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0$ – Лаплас теңдеуінің $r<R$ үшін $u\big|_{r=R}=f(\varphi)$ шартын қанағаттандыратын ішкі шеттік есептің шешімі мынадай түрде:

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\varphi-\psi)+r^2}d\psi, \qquad (74)$$

ал сыртқы шеттік есептің шешімі:

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\frac{r^2-R^2}{R^2-2Rr\cos(\varphi-\psi)+r^2}d\psi, \quad r>R \text{ үшін} \qquad (74')$$

түрінде жазылады.

Мұндағы $f(\varphi)$ – берілген үзіліссіз функция.

1. Лаплас теңдеуі үшін Дирихле есебі.

Анықтама: Егер екі аргументті G(x,y) Ω аймақта:

1. $G(x,y) = E_n(x,y)+g(x,y)$ - Лаплас теңдеуінің іргелі шешімі мен гармониялық функция қосындысынан тұрса;

2. $G(x,y)/s=0$ болса, оны Дирихле есебінің (Лаплас теңдеуін) Ω аймақтағы Грин функциясы деп атайды.

Грин функциясын құру мына шекаралық есепті шешуге әкеледі.

$$\Delta_y g(x,y)=0, \quad y\in\Omega$$

$$g(x,y)\big|_{y\in S}=-E_n(x,y)\big|_{y\in S}$$

Егер Грин функциясы белгілі болса, онда төмендегі есептер оңай шешіледі.

$$\Delta u(x)=F(x), \qquad u(x)\big|_S=f(x)\big|_{x\in S}$$

есептің шешімі

$$u(x)=\frac{1}{\omega_n}\int_S f(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial y}dS_y-\frac{1}{\omega_n}\int_\Omega F(y)G(x,y)dy$$

мұндағы ω_n - бірлік сфера бетінің ауданы.

Кейбір аймақтар үшін Грин функцияларын келтірейік.

а) жарты кеңістік үшін

$$G(x,y)=\frac{1}{|x-y|}-\frac{1}{|\bar{x}-y|}, \quad n=3, \quad x_3\ge 0;$$

$$\ln\frac{1}{|x-y|}-\ln\frac{1}{|\bar{x}-y|},\quad n=2,\quad x_2\ge 0$$

мұндағы $x=(x_1,x_2,x_3),\qquad \bar{x}=(x_1,x_2-x_3),\qquad n=3;$ сонымен жалпы жағдайда жарты кеңістік үшін Грин функциясы

$$G(x,y)=E_n(x,y)-E_n(x,y),\qquad n=2{,}3.$$

б) Шар үшін, яғни Ω шар, оның шекарасы.

$\sigma:\ |y|=a$ - сфера, n=3

$$G(x,y)=\frac{1}{|x-y|}-\frac{a}{|x|}\cdot\frac{1}{|\bar{x}-y|},$$

немесе

$$G(x,y)=E_3(x,y)-E_3\left(\frac{a}{|x|}x,\frac{|x|}{a}y\right)$$

Мысал: $\Delta u(x)=0,\ u(x)\big|_{x_n=0}=f(x)\in C(S)$ яғни Лаплас теңдеуі үшін жарты кеңістіктегі Дирихле есебінің шешімі

$$u(x)=-\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{y_n=0}f(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial y_n}dS_y,$$

дербес жағдайда $$\left.\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu}\right|_{y_n=0}=-\left.\frac{\partial G(x,y)}{\partial y_n}\right|_{y_n=0}=\begin{cases}-\dfrac{2x_3}{|x-y|^3}, & n=3\\[2mm] -\dfrac{2x_2}{|x-y|^2}, & n=2\end{cases}$$

демек $u(x_1,x_2)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int f(y_1)\frac{x_2}{(x_1-y_1)^2+x_2^2}dy_1$ - жарты жазықтық (n=2),

ал

$$u(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{2\pi}\int\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(y_1,y_2)\frac{x_3}{\left[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+x_3^2\right]^{3/2}}dy_1dy_2$$

үш өлшемді жарты кеңістік n=3 үшін шешімдері.